/ /　　　　　　　　المحاضرة الثانية

تعريف : المتتالية العددية ونهايتها :

ليعد التابع معطى إذا علم : مجموعة تعريف (المنطلق) وقاعدة ربطه أي الدستور الذي يعرّف به التابع وأحياناً يعرف بذلك المستقر

والمتتالية هي أحد هذه الأنواع من التوابع حيث مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعية أو أية مجموعة جزئية منها ومستقرها $\mathbb{R}$ أو أية مجموعة جزئية منها

أي نستطيع أن نكتب $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longmapsto f(n) = x_n$$

حيث $f(n) = x_n$ هي قاعدة الربط المعتمدة ويقال في هذه الحالة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أو $\{x_n\}_{n\geq 1}$ أو اختصاراً $\{x_n\}$

فمثلاً متتالية : $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ أو $\{\frac{1}{n}\}$ أو $x_n = \frac{1}{n} ; n\geq 1$

وهناك فرق بين ~~حدود~~ المتتالية و قيم الدالة ~~المتتالية~~ فمثلاً $y_n = (-1)^n$ حدودها هي [redacted] $\{+1, -1, +1, -1, \ldots\}$ بينما قيمها $\{+1, -1\}$

هنا الحديث يدور حول المتتاليات العددية وليس الدالية $f(x) = \frac{x^n}{n}$ دالية $f_n = \frac{1}{n}$ عددية

تقارب متتالية :

نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ أنها متقاربة من العدد الحقيقي x إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \quad \ldots (1)$$

أي أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من العدد x ونكتب $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ إذا تحقق الشرط (1)

مثال :

المتتالية التي حدها العام $x_n = \frac{n}{n+1}$; $n \geq 1$ متقاربة من العدد (1) لتحقق الشرط (1) السابق أي

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

بينما المتتالية التي حدها العام $y_n = (-1)^{n+1}$ ليست متقاربة كما نعلم أي ليس لها نهاية ولكن لها نهاية عليا ونهاية دنيا أي

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n = \lim_{n\to\infty} \sup y_n = 1$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n = \lim_{n\to\infty} \inf y_n = -1$$

والنهاية للمتتالية إن وجدت وحيدة

ALSAMAH®

Scanned by CamScanner

/ /

نرمز بـ C لكل المتتاليات المتقاربة أما المتتاليات المتقاربة من الصفر فنرمز لها C_0
إذاً يقال أن المتتالية الأولى في المثال السابق $x_n \in C$ بينما $y_n \notin C$
والمتتالية $a_n = \frac{1}{n} \in C_0$

3) المتتالية الكوشية (أو الأساسية):
نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ أنها كوشية (أو أساسية) إذا حققت الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \quad \ldots (2)$$

ملاحظة:
كل متتالية متقاربة هي كوشية (أو أساسية) لأنه لو فرضنا $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ فإن:

$$|x_n - x_m| = |x_n - x - (x_m - x)| \le |x_n - x| + |x_m - x|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

مثلاً: المتتالية العددية $x_n = \frac{1}{n}$ حيث $x \in]0,1[$ هي متقاربة كما نعلم من الصفر
بالإضافة لأنها ليست كوشية لأن نهايتها أي الصفر لا تنتمي إلى المجال المعرفة عليه $0 \notin]0,1[$

أما في $\mathbb{R}$ فهي متقاربة وكوشية وذلك لأن $n,m > N(\varepsilon)$; $|\frac{1}{n} + \frac{1}{m}| < \varepsilon$
بينما المتتالية التي حدها العام $y_n = (1+\frac{1}{n})^n$ حيث $n \ge 1$ والتي تتكون من أعداد كسرية
أو نسبية أو كسرية متقاربة من العدد النيبري $x = e$ ونلاحظ أن $e \in \tilde{Q}$
$y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$ أي متقاربة في $\mathbb{R}$ وغير متقاربة في Q وهي
كوشية (أو أساسية) في $\mathbb{R}$

نرمز هنا لكل المتتاليات الكوشية بـ C_1 عندها $a_n = \frac{1}{n} \in C_1$ في $\mathbb{R}$ بينما
$a_n = \frac{1}{n} \notin C_1$ في $]0,1[$

4) المتتالية المحدودة: محدودة أو منتهية المستقيم جهات:
نقول عن المتتالية التي حدها العام x_n أنها محدودة إذا وجد عدد حقيقي K
أي $|x_n| \le K, \forall n$; $-K \le x_n \le K$; $\forall n$
ونكتب:
$$\alpha \le x_n \le \beta \ ; \ n \ge 1$$

/ /

ونرمز لهذه المجموعة l_∞ إذا $\forall n: |x_n| \leq K$ فمثلاً المتتالية التي حدها العام $\frac{1}{n}$ حيث: $1 \geq \frac{1}{n} > 0$ إذا كانت n فإن $x_n \in l_\infty$.

5) النهاية العليا والدنيا للمتتالية: $x_n \in l_\infty$ متتالية حقيقية،
نعرف هنا المتتالية العليا لـ x_n على أنها:

$$\lim_{n \to \infty} \sup x_n = \overline{\lim_{n \to \infty}} x_n = \inf_{k \geq 1} (\sup_{n \geq k} x_n) \quad \text{—— (1)}$$

أما النهاية الدنيا أو السفلى تعرف:

$$\lim_{n \to \infty} \inf x_n = \underline{\lim_{n \to \infty}} x_n \quad \text{—— (2)}$$

فإذا كانت المتتالية المفروضة محدودة فإن كلاً من هاتين النهايتين هي عبارة عن أعداد حقيقية محدودة ويكون المتتالية متقاربة إذا تساوت كل من هاتين النهايتين ومن خواصها أن النهاية الدنيا

$$\lim_{n \to \infty} \inf x_n \leq \lim_{n \to \infty} \sup x_n$$

مبرهنة (1 - 1) فضاء كوشي ~~متقاربة~~ متقاربة حقيقي عقدي
يكون $C = \mathcal{C} \subset l_\infty$ في $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$

الإثبات:

إن $C \subset \mathcal{C}$ (كل متقاربة هي كوشية)

$\mathcal{C} \subseteq C$ (لأنها متتالية حقيقية)

لتكن $\{x_n\}$ متتالية كوشية أي $\{x_n\} \subseteq \mathcal{C}$ ولتأخذ حالة ($\epsilon = 1$) أي أن

$$|x_n - x_m| < 1 \quad ; \quad n, m > N(1)$$

$-1 < |x_n - x_m| < +1$

ويكون $|x_n| < 1 + |x_N| \quad ; \quad n > N(1)$

وبالتالي فإن $\{x_n\} \in l_\infty$ أي المتتالية الكوشية محدودة مما يعني أنه يوجد لهذه المتتالية نهاية عليا ودنيا

تكملة ص 21

11) متراجحات أساسية :

في هذا الفقرة سنعالج بعض المتراجحات الهامة التي تتعلق بالمجاميع والتكاملات وفي هذه المتراجحات مقادير عددية أو عقدية وهي إما أن تكون من 1 إلى n أو من 1 إلى ∞ وهذه في المجاميع

1) متراجحة المثلث : $x, y \in \mathbb{C}$ فإن (1) ... $|x+y| \le |x|+|y|$

الإثبات :

$$|a+b|^2 = (a+b)(\bar{a}+\bar{b})$$
$$= a.\bar{a} + b.\bar{b} + a.\bar{b} + \bar{a}.b$$

$$|x+y|^2 = (x+y)(\bar{x}+\bar{y})$$
$$= x.\bar{x} + y.\bar{y} + x.\bar{y} + \bar{x}.y$$
$$= |x|^2 + |y|^2 + 2\,Re(x.y) \le |x|^2+|y|^2 + 2|x.y| =$$
$$= (|x|+|y|)^2$$

أي $|x+y| \le |x| + |y|$

2) المتراجحة الثانية :

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \le \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \quad ; x,y \in \mathbb{C}$$

2 ...

تمرين :

نقوم بتشكيل التابع $f(t) = \frac{t}{1+t}$; $t \in]-1, +\infty[$

وإثبات أنه متزايد تماماً على هذه المجموعة بطريقة المشتق

تعريف العددان المترافقان :

ليكن العددان $q>0, P>0$ نقول عن هذين العددين الحقيقيين أنهما مترافقان

إذا تحقق $\frac{1}{q}+\frac{1}{p} = 1$; $P>0$

نلاحظ عندما $P = q = 2$

نجد عدداً يتحقق أي $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

العددان P, q يحققان فيما بينهما ما يلي : $P+q = P\cdot q$

$$P = q(P-1) \quad ; \quad q = P(q-1)$$

$$\frac{P+q}{P\cdot q} = 1$$

ALSAMAH®
Scanned by CamScanner

/ /

المتراجحة الثالثة: $x, y > 0$ و (موجبان) p ، q مترافقان فيما بينهما

$$x \cdot y \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \dots (3)$$

وفي حالة خاصة إذا كان $x^p = y^q$ فإن المساواة تتحقق في (3)

المتراجحة الرابعة: متراجحة هولدر للمجاميع:
إذا كان $1 < p$ و q مرافقه بحيث أن $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ عندئذٍ فإن

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k \cdot y_k| \le \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right]^{\frac{1}{q}} \quad \dots (4)$$

$$x_k = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad ; \quad y_k = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

وهذه المتراجحة صحيحة عندما نجعل n تسعى إلى مالانهاية ∞ ؛ $n \to \infty$

ملاحظة:
أ) نلاحظ أنه إذا وضعنا في 4 كل $p = 1$ فإن $\frac{1}{q}$ يسعى إلى الصفر (أي ($q \to \infty$)
فإننا نحصل على المتراجحة التالية:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \max_{k} |y_k| \quad \dots (4)'$$

في حالة خاصة إذا وضعنا $p = q = 2$ فإننا نحصل على متتالية كوشي وصي:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \cdot y_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} \quad \dots (4)''$$

5) متراجحة منكوفسكي للمجاميع: $1 \le p < \infty$ و q مرافقه بحيث $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$
عندئذٍ يكون:

$$\left[\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \dots (5)$$

حيث x_k, y_k ; $k = 1, 2, \dots, n$
ضع هنا $p = 1$ فإننا نحصل على متراجحة بسيطة و معروفة

ALSAMAH®

Scanned by CamScanner

ملاحظة: إذا وضعنا $p = q = 2$ في (5) نلاحظ نحصل على متراجحة كوشي شوارتز

6) متراجحة هولدر للتكاملات: إذا كان $1 < p < \infty$ و q مرافقه بحيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ عندئذ نثبت المتراجحة التكاملية:

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|\,dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \ldots (6)$$

حيث f, g تنتمي إلى $f, g \in L_{p[a,b]}$

$f, g \in L_{[a,b]}$

نحصل في حالة خاصة على متراجحة شوارتز إذا أخذنا $p = q = 2$

مثال (1):

لتكن الدالتان f, g كمولتان حسب مفهوم ستيلجس وغير سالبتين بالنسبة للدالة المتزايدة على $[a,b]$ كما أن التكامل

$$\int_a^b f^p\, d\varphi = \int_a^b g^q\, d\varphi = 1 \quad \ldots (I)$$

$$f \geq 0;\ g \geq 0;\ \forall x \in [a,b]$$

عندئذ نثبت صحة المتراجحة $(b > a)$:

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, d\varphi(t) \leq 1$$

بناءً على متراجحة هولدر للتكاملات وملاحظة سابقة يكون لدينا

$$f \cdot g \leq \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}$$

من هذه المتراجحة وكون $\varphi = \varphi(t)$ متزايدة وصحة المتراجحة (I) فإن

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t)\, d\varphi(t) \leq \int_a^b \frac{f^p}{p}\, d\varphi + \int_a^b \frac{g^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

إذاً نثبت المتراجحة المطلوبة.

ALSAMAH®

Scanned by CamScanner